Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Izbirni predmeti na magistrskih programih Oddelka za matematiko FMF

Študijsko leto 2018/19

Ljubljana, 2018

Seznam temeljnih predmetov na magistrskem študiju

Naslednji predmeti so ključni v svojih skupinah in imajo zagotovljeno izvajanje vsaki dve leti.

Skupina	Temeljni predmeti
M1 (analiza in mehanika)	Kompleksna analiza Parcialne diferencialne enačbe Teorija mere Uvod v funkcionalno analizo
M2 (algebra in diskretna matematika)	Kombinatorika Komutativna algebra Nekomutativna algebra Teorija grafov
M3 (geometrija in topologija)	Algebraična topologija 1 Analiza na mnogoterostih
M4 (numerična matematika)	Numerična aproksimacija in interpolacija Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje
M5 (verjetnost, statistika, finančna matematika)	Finančna matematika 2 Statistika 2 Verjetnost 2
R1 (računalniška matematika)	Logika v računalništvu Matematika z računalnikom Računska geometrija Verjetnostne metode v računalništvu
O (ostalo)	Matematični modeli v biologiji Astronomija Moderna fizika

Seznam izbirnih predmetov v letu 2018/19

Skupina	Predmet	Izvajalec	Semester
M1	Parcialne diferencialne enačbe	Kostenko	poletni
	Uvod v funkcionalno analizo	Drnovšek	zimski
	Mehanika deformabilnih teles	Mejak	zimski
M2	Nekomutativna algebra	Klep	zimski
	Teorija grafov	Klavžar	poletni
	Izbrana poglavja iz diskretne matematike⋆	Konvalinka	zimski
	Logika	Simpson	poletni
M3	Liejeve grupe	Mrčun	poletni
	Konveksnost	Lavrič	zimski
	Riemannove ploskve	Forstnerič	zimski
M4	Računalniško podprto (geometrijsko) oblikovanje	Knez	zimski
	Numerična integracija in navadne diferencialne enačbe	Žagar	poletni
M5	Finančna matematika 2	Perman	zimski
	Aktuarska matematika - življenjska zavarovanja	Pitacco	poletni
	Verjetnost 2	Bernik	zimski
	Optimizacija v financah	Agram	poletni
	Finančna matematika 3	Gall	poletni
	Izbrana poglavja iz teorije iger	Ule	poletni
R1	Izbrana poglavja iz računalniške matematike*	Todorovski	poletni
	Izbrana poglavja iz optimizacije	Povh	zimski
	Teorija izračunljivosti	Simpson	zimski
	Računska geometrija	Cabello	poletni
O	Matematični modeli v biologiji	Boldin	poletni
	Moderna fizika	Križan	zimski
	Astronomija	Zwitter	oba
	Delovna praksa	Konvalinka/Košir	oba

⋆ Simetrične funkcije.
* Napredno strojno učenje.

Partial Differential Equations

Aleksey Kostenko

Content:
It is a difficult to overestimate the role of partial differential equations (PDEs) in both theoretical and applied mathematics. In the course we plan to cover some important theoretical chapters as well as some nontrivial applications of differential equations.

The first part of the course will be devoted to the study of the most important linear equations: transport, wave, heat, Laplace and Schrödinger equations. The second part will be an introduction to the functional analytic treatment of partial differential equations (e.g., Sobolev spaces, distributions, linear PDEs with constant coefficients, second-order elliptic PDEs, etc.). The third part can be considered as an introduction to nonlinear PDEs.

Necessary/Expected Knowledge: The subject of the course is to understand the subject matter of Analysis III and Analysis IV from the first stage of the Bologna study of mathematics.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje.

Uvod v funkcionalno analizo

Roman Drnovšek

Vsebina:
Spoznamo osnovne pojme teorije Hilbertovih prostorov in linearnih operatorjev med njimi. Precej pozornosti posvetimo kompaktnim operatorjem, ki imajo podobne lastnosti kot operatorji na končnorazsežnih prostorih. Dobljene rezultate uporabimo pri reševanju Sturm-Liouvilleovega problema, ki se pojavlja pri več fizikalnih problemih, na primer pri opisu gibanja nihajoče strune.

V zadnjem delu predmeta pokukamo v teorijo normiranih prostorov, ki so posplošitev Hilbertovih prostorov. Obravnavamo končnorazsežne normirane prostore in kvociente normiranih prostorov. Pri obravnavi linearnih funkcionalov dokažemo Hahn-Banachov izrek in nekatere njegove posledice. Predmet zaključimo z Mazur-Ulamovim izrekom, ki pravi, da je bijektivna izometrija med normiranima prostoroma afina preslikava.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnove linearne algebre in matematične analize.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje. Namesto kolokvijev dve domači nalogi, ki se upoštevata pri oceni. Pisni izpit.

Dynamical Systems

Aleksey Kostenko

Content:
1. *Qualitative analysis of systems of nonlinear differential equations.* Basic existence and uniquenes theorems for systems (repetition and completion).
2. *Phase portraits of autonomous systems.* Classification of critical points, Hartman–Grobman linearization theorem, stability theory, Lyapunov method.
3. *Periodic motions and cycles in the real plane.* Poincaré–Bendixson theory (topological background, proof and examples), Kolmogorov theorem, Hopf bifurcation and emerging of cycles, introduction to chaotic motion.
4. *Basic discrete dynamics.* Difference equations. The logistic equation. Classification of fixed points. Period doubling and chaos. Heteroclinic orbits ans Smale horseshoe. Polynomial iteration in the complex plane. Julia, Fatou and Mandelbrot sets.

Necessary/Expected Knowledge. Linear algebra; differential equations; topology in euclidean spaces.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje.

Mehanika deformabilnih teles

George Mejak

Vsebina:
Mehanika deformabilnih teles je področje mehanike, ki obravnava mehanske zakonitosti materije, ki dopušča spremembo obliko. Klasična uporaba mehanike deformabilnih teles je uporaba v strojništvu in gradbeništvu, kjer je znana pod imenom Trdnost, novejša pa v mehaniki materialov in mehaniki živih tkiv. Predmet podaja temeljno znanje za nadaljni študij na specialnih področjih mehanike deformabilnih teles, hkrati pa tudi povezuje pridobljeno znanje matematike in nudi številne primere uporabe že pridobljenih teoretičnih znanj.

Osnovna pojma mehanike deformabilnih teles sta deformacija in napetost. Deformacija preko deformacijskega tenzorja podaja matematični opis spremembe oblike, napetost pa odpor materije do deformacije. Deformacijo in napetost povezuje konstitutivna zveza, ki mora biti invariantna za izbiro opazovalca in kot taka predstavlja naravni zakon. Material je lahko naprimer elastičen, plastičen ali viskoelastičen. Konkretno obliko konstitutivne zveze pa nadalje opredeljujeta še geometrična in materialna simetrija.

Vsebinska poglavja predmeta so:

- deformacija;
- napetost;
- konstitutivnostna teorija;
- materialne simetrije;
- infinitezimalna teorija elastičnosti;
- nelinearna elastičnost;
- plastičnost;
- numerične metode v mehaniki deformabilnih teles.

Potrebno/pričakovano predznanje: Za razumevanja predmeta je potrebno znanje linearne algebre in analize.

Izvedba 3/2: Predavanja, domače naloge in vaje. Na predavanjih teorija in osnovni primeri, na vajah dodatni primeri in diskusija domačih nalog. Ocena: pisni del domače naloge, ustni njihov zagovor.

Nekomutativna algebra

Igor Klep

Vsebina:
Obravnavani bodo nekomutativni kolobarji in nekomutativne algebre. Kolobarji so ena osrednjih struktur, ki se pojavljajo v abstraktni algebri. Pogosto pa jih srečamo tudi na drugih matematičnih področjih: v teoriji upodobitev (grupni kolobarji), funkcionalni analizi (operatorske algebre), kompleksni analizi (kolobarji holomorfnih ali meromorfnih funkcij), parcialnih diferencialnih enačbah, topologiji (kohomološki kolobarji) in še kje. Tako bo predmet zelo koristen za študente, ki bi se želeli usmeriti v teoretično matematiko. Zanimiv pa bo tudi za vse, ki jih algebra veseli in bi želeli njeno znanje nadgraditi ter osvetliti znane pojme iz prvostopenjskega študija v novi luči.

Pri predmetu bo študent najprej spoznal končno razsežne algebre, jedro predmeta pa bo strukturna teorija kolobarjev. Za konec se bomo ukvarjali tudi s teorijo modulov.

Potrebno/pričakovano predznanje: Algebra 2 in Algebra 3 prve stopnje študija matematike. Zahtevnejšim pojmom bo namenjena kratka ponovitev.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje. Domača naloga se upošteva pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Teorija grafov

Sandi Klavžar

Vsebina:

- Prirejanja in faktorji (največja in popolna prirejanja, Tuttov izrek; prirejanja v dvodelnih grafih; neodvisne množice in pokritja, Gallaijev izrek)
- Povezanost (2-povezani grafi, ušesna dekompozicija; k-povezanost, Mengerjev izrek; povezanost digrafov, Mengerjev izrek za digrafe)
- Barvanja grafov (meje za kromatično število, Brooksov izrek; struktura k-kromatičnih grafov, Turanov izrek; kromatični polinom; tetivni in popolni grafi)
- Ravninski grafi (osnovni pojmi in rezultati, dualni grafi in triangulacije; izrek Kuratowskega in konveksne vložitve; barvanja ravninskih grafov in prekrižno število)
- Dominacija v grafih (meje za dominantno število; inačice dominacije; dominacija v kartezičnih produktih grafov in Vizingova domneva)

Temeljna literatura:

- A. Bondy, U.S.R. Murty: Graph Theory, Springer, Berlin, 2008.
- W. Imrich, S.Klavžar, D.F. Rall, Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product, A K Peters/CRC Press, Wellesley, 2008.
- D. West: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.

Potrebno/pričakovano predznanje: Poznavanje osnov teorije grafov in kombinatorike v okviru vsebin predmeta prve stopnje Diskretna matematika 1.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje. Po opravljenem pisnem izpitu (ali 2 kolokvija namesto izpita iz vaj) je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Izbrana poglavja iz diskretne matematike: simetrične funkcije

Matjaž Konvalinka

Vsebina:
Pri predmetu se bomo ukvarjali s simetričnimi funkcijami, ključnim objektom v (algebraični) kombinatoriki, ki igrajo pomembno vlogo tudi v teoriji upodobitev, geometriji in drugod.
Predmet bomo začeli s ponovitvijo ključnih pojmov (razčlenitve, rodovne funkcije). Večina predmeta bo posvečena izjemno bogati algebri simetričnih funkcij, v kateri imamo poleg operacij, značilnih za algebre, tudi naraven skalarni produkt, involucijo, koprodukt, pletizem itd., in njenim pomembnim bazam, predvsem bazi Schurovih funkcij.
Spoznali bomo ključne kombinatorične algoritme (npr. RSK, jeu-de-taquin) in rezultate (Jacobi-Trudijeva identiteta, Murnaghan-Nakayamovo pravilo, Littlewood-Richardsonovo pravilo). Ob koncu predmeta si bomo ogledali še vlogo Schurovih funkcij v teoriji upodobitev (simetrične grupe in grupe GL_n).

Potrebno/pričakovano predznanje:
Znanje kombinatorike vsaj na nivoju Diskretne matematike 1 (na programu Matematika oz. Finančna matematika) ali Kombinatorike (na programu IŠRM); osnovno znanje algebre (grupe, kolobarji itd.). Predznanje s predmeta Kombinatorika (magistrski študij Matematika oz. Finančna matematika) oziroma Kombinatorika 2 (magistrski študij IŠRM) je dobrodošlo, ni pa pogoj.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Pisni del izpita predstavlja samostojno reševanje domačih nalog. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti ustni del izpita.

Logic

Alex Simpson

Vsebina:
The course studies first-order logic, its proof theory and model theory, leading to Gödel's celebrated incompleteness theorems.

(1) Syntax and semantics of first-order logic.
(2) Examples of first-order theories. Some basic decidability results.
(3) Gentzen's sequent calculus.
(4) Gödel's completeness theorem.
(5) Compactness, the Löwenheim-Skolem theorem, basic model theory.
(6) Peano arithmetic and Gödel's incompleteness theorems.
(7) The Church/Turing theorem on the undecidability of arithmetic.

This material touches on matters of fundamental significance in mathematics which have bearing on the very nature of mathematical reasoning and mathematical truth, and the need for creativity in mathematics. Gödel's completeness theorem demonstrates that we can completely describe all legitimate rules for reasoning from a set of axioms. His incompleteness theorems, in contrast, show that it is impossible to provide a consistent set of axioms capturing all truths of arithmetic. And the Church/Turing theorem shows that it is impossible to write a computer program that will automatically "decide"whether a mathematical statement is true or false.

The course will be given in English.

Literatura:

- N. Prijatelj: Osnove matematične logike, 2. del: Formalizacija, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1992.
- N. Prijatelj: Osnove matematične logike, 3. del: Aplikacija, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.
- W. Rautenberg: A Concise Introduction to Mathematical Logic. Universitext, 2009.

Potrebno/pričakovano predznanje:
Opravljen predmet Logika in množice iz 1. letnika ali ekvivalentno znanje.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Obveznosti študenta: pisni izpit.

Liejeve grupe

Janez Mrčun

Vsebina:
Liejeva grupa je množica, ki je hkrati opremljena z dvema med seboj kompatibilnima strukturama: z algebraično strukturo grupe in z geometrično strukturo gladke mnogoterosti. Liejeve grupe se naravno pojavljajo kot grupe simetrij geometrijskih objektov. Osnovni primeri Liejevih grup so matrične grupe: splošni linearni grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n)$, unitarna grupa $\mathrm{U}(n)$, specialni linearni grupi $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ itd. Primera Liejevih grup sta tudi prostor $\mathbb{R}^n$ in n-razsežni torus T^n.

Tangentni prostor poljubne Liejeve grupe v točki 1 ima naravno strukturo končnorazsežne Liejeve algebre. Tako na primer splošni linearni grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ pripada Liejeva algebra vseh realnih matrik velikosti $n \times n$, medtem ko ortogonalni grupi $\mathrm{O}(n)$ pripada Liejeva algebra vseh realnih antisimetričnih matrik velikosti $n \times n$. V obeh primerih je množenje v pripadajoči Liejevi algebri dano s komutatorjem matrik. Velik del strukture Liejeve grupe je določen s pripadajočo Liejevo algebro: Liejeva teorija pove, da vsaka realna končno-razsežna Liejeva algebra pripada natanko eni enostavno povezani Liejevi grupi.

Za študij strukture abstraktne Liejeve grupe so še posebej pomembne njene upodobitve na vektorskih prostorih. Takšne upodobitve nam omogočijo, da množenje v Liejevi grupi interpretiramo kot množenje matrik in nato za študij strukture Liejeve grupe uporabimo orodja iz linearne algebre. Izkaže se celo, da je vsaka kompaktna Liejeva grupa izomorfna neki podgrupi unitarne grupe.

Teorija upodobitev Liejevih grup je posplošitev Fourierove teorije, ki se uporablja za analizo, kompresijo in filtracijo signalov, slik ter filmov. V mehaniki se simetrija sistema kaže kot invariantnost tega sistema glede na delovanje neke Liejeve grupe, simetrije mehanskih sistemov pa so tesno povezane z ohranitvijo fizikalnih količin kot sta na primer energija in pa vrtilna količina. V moderni fiziki se upodobitve unitarnih grup uporabljajo pri opisu osnovnih delcev.

Zapiski predavanj s pregledom vsebine po poglavjih in seznamom dodatne literature so na voljo na naslovu: `https://www.fmf.uni-lj.si/~mrcun/preprints/lg.pdf`

Potrebno/pričakovano predznanje: Potrebno je poznavanje analize funkcij več realnih spremenljivk in linearne algebre. Poleg tega je pričakovano tudi poznavanje nekaterih osnovnih pojmov iz teorije grup ter iz splošne topologije (oziroma metričnih prostorov), ki pa jih bomo tudi na kratko povzeli v uvodnih urah predavanj.

Izvedba: Tri ure predavanj in dve uri vaj tedensko. Obveznosti študenta: samostojno reševanje domačih nalog in ustni izpit.

Konveksnost

Boris Lavrič

Vsebina:
Teorija konveksnosti je relativno mlado področje matematike, v katerem se prepletajo vsebine iz geometrije, linearne algebre, analize in kombinatorike, povezane s preprostim geometrijskim pojmom, ki daje teoriji ime.

Pri predmetu bomo obravnavali osnovne poteze konveksne geometrije in konveksne analize in jih povezali s širokim območjem aplikacij teorije konveksnosti. Poleg lastnosti konveksnih množic in konveksnih funkcij v končno razsežnih evklidskih prostorih si bomo ogledali tudi njihovo uporabo pri reševanju problemov iz drugih področij matematike, predvsem linearne algebre, geometrije in uporabne matematike.

Teme iz vsebine predmeta: Osnovne geometrijske in kombinatorične lastnosti konveksnih množic. Separacijski izreki. Ekstremne podmnožice konveksnih množic. Politopi in poliedri. Izrek Weyla in Minkowskega. Stožci, polare in urejenost. Sistemi linearnih neenačb. Farkaseva lema in linearno programiranje. Metrični prostor in metrične lastnosti konveksnih množic. Konveksne funkcije.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnove linearne algebre in analize.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje. Pisni izpit iz vaj (ali po dogovoru dva kolokvija) in ustni izpit iz teorije.

Riemannove ploskve

Franc Forstnerič

Opis:
Riemannova ploskev je enorazsežna kompleksna mnogoterost. Poleg domen v kompleksni ravnini so najpreprostejši primeri Riemannova sfera in kompleksni torusi, imenovani tudi eliptične krivulje. Zanimajo nas tako Riemannove ploskve kot holomorfne funkcije na njih in holomorfne preslikave med njimi.

Teorija Riemannovih ploskev leži na presečišču številnih področij matematike, od klasične kompleksne analize in analize na mnogoterostih, preko teorije kompleksnih in algebraičnih krivulj, do novejših uporab v simplektični geometriji, nizko dimenzionalni topologiji, teoriji strun, pa vse do kriptografije.

V predmetu bomo razvili osnove teorije Riemannovih ploskev s pomočjo kompleksne analize, ki ponuja najhitrejšo pot do nekaterih pomembnih rezultatov, kot je npr. Riemann-Rochov izrek, z manj predznanja. Spotoma bomo spoznali bogato paleto Riemannovih ploskev.

Vsebina:
Definicija Riemannove ploskve. Osnovni primeri. Holomorfne in meromorfne funkcije in preslikave. Topologija Riemannovih ploskev. Krovni prostori in krovne transformacije. Analitično nadaljevanje. Algebraične funkcije. Riemannove ploskve kot kompleksne krivulje v evklidskih in projektivnih prostorih. Konstrukcija meromorfnih funkcij na kompaktnih Riemannovih ploskvah z L^2-metodo. Weylova lema. Meromorfne funkcije in diferenciali. Harmonični in analitični diferenciali. Divizorji in holomorfni vektorski svežnji. Riemannov-Rochov izrek in uporaba. Serrejeva dualnost.

Potrebno/pričakovano predznanje:
Osnove analize in topologije o obsegu premetov prvih dveh letnikov na 1.stopnji študijskega programa matematika.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Izpit sestoji iz pisnega in ustnega dela. Pisni del izpita vsebuje tudi izdelavo domačih nalog.

Glavna literatura:

- H. M. Farkas, I. Kra: Riemann surfaces. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1992.
- O. Forster; Lectures on Riemann surfaces. Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1991.
- F. Forstnerič: Riemannove ploskve in analitična geometrija. Univerza v Ljubljani. Zapiski predavanj, objavljeni na spletni učilnici Oddelka za matematiko FMF.
- P. Griffiths: Introduction to Algebraic Curves. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 76, AMS, 1980.
- R. Miranda: Algebraic curves and Riemann surfaces. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje

Marjetka Knez

Vsebina:
Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje oz. krajše CAGD (Computer Aided Geometric Design) je moderno področje na meji med matematiko in računalništvom. Gre za razvoj in študij matematičnih metod za predstavitev in delo s krivuljami, ploskvami ter telesi. Daje nam osnovo za računalniško podprto oblikovanje (CAD), proizvodnjo (CAM) in delo s parametričnimi krivuljami, ploskvami in telesi v industriji (načrtovanje oblike izdelkov, vodenje robotov, strojna proizvodnja izdelkov, modeliranje in simulacije). Pri predmetu se bomo najprej spoznali z Bézierjevimi krivuljami, ki predstavljajo osnovno orodje. Ogledali si bomo njihove lastnosti ter algoritme za delo z njimi. V nadaljevanju bomo obravnavali zlepke iz Bézierjevih krivulj, geometrijsko zveznost ter racionalne Bézierjeve krivulje. Znanje bomo posplo"sili tudi na ploskve, pri čemer bomo spoznali Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta ter trikotne Bézierjeve krpe. Teorijo bomo podkrepili s praktičnimi zgledi s pomočjo implementacije izpeljanih algoritmov.

Potrebno/pričakovano predznanje: Poznavanje osnov numerične matematike in Matlaba.

Izvedba: Predmet se bo izvajal s 3 urami predavanj in 2 urama vaj v računalniški učilnici. Načrtovan izpitni režim: kvizi, seminarska naloga/projekt s predstavitvijo ter izpit iz teorije (pisni ali ustni).

Numerična integracija in navadne diferencialne enačbe

Emil Žagar

Vsebina:

Predmet obravnava snov, ki v uporabno smer nadgrajuje poznavanje matematike na področju integracije in reševanja navadnih diferencialnih enačb. Slušatelja vpelje v numerične metode, njihovo analizo in implementacijo ter spozna s praktičnimi problemi, kjer se posamezni pristopi posebej odlikujejo. S tem nudi dobro podporo reševanju raznovrstnih praktičnih problemov na tehničnem, finančnem, družboslovnem in drugih področjih.

Obravnavane bodo naslednje teme: numerično odvajanje, Newton-Cotesova pravila in njihova nadgradnja, Gaussova pravila, integracija v več spremenljivkah, metode tipa Monte Carlo. Reševanje navadnih diferencialnih enačb, začetni problemi, enočlenske metode in veččlenske metode, toge diferencialne enačbe. Robni problemi, diferenčna metoda, metoda končnih elementov, kolokacija.

Potrebno/pričakovano predznanje: Koristno je znanje snovi predmeta *Numerična aproksimacija in interpolacija*.

Izvedba 3/0/2: Predavanja in vaje. Načrtovan izpitni režim: domači nalogi, pisni in ustni izpit. Domači nalogi se upoštevata pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Finančna matematika 2

Mihael Perman

Vsebina:

1. Sredstva iz analize in verjetnosti.
1.1 Funkcije z omejeno totalno variacijo.
1.2 Lebesgue-Stiltjesov integral.
1.3 Konvergenca v L^2 prostorih.
1.1 Maksimalne neenakosti za diskretne martingale.
2. Brownovo gibanje.
2.1 Motivacija in definicija.
2.2 Markovska in krepka markovska lastnost, princip zrcaljenja.
2.2 Brownovi martingali.
2.3 Martingali v zveznem času, kvadratična variacija.
2.4 Izrek o opcijskem ustavljanju v zveznem času.
3. Itôv integral.
3.1 Konstrukcija, Itôva izometrija, osnovne lastnosti.
3.2 Itôva lema in uporabe.
3.2 Lokalizacija in lokalni martingali.
3.2 Integral glede na lokalni martingal
3.2 Splošna Itôva formula.
4. Vrednotenje izvedenih vrednostnih papirjev.
4.1 Black-Sholesov model.
4.2 Varovanje v zveznem času.
4.3 Zamenjava mere, izrek Girsanova.
4.4 Izrek o martingalski reprezentaciji.
4.5 Eksplicitni primeri vrednotenja opcij.

Potrebno/pričakovano predznanje: Analiza 2: parcialno odvajanje, integracija funkcij več spremenljivk in integrali s parametrom. Verjetnost: neodvisnost, pričakovana vrednost, osnovne porazdelitve, pogojne porazdelitve in pogojna pričakovana vrednost, diskretni martingali. Teorija mere: abstraktni integral, izreka o monotoni in dominirani konvergenci, Fubinijev izrek, Radon-Nikodýmov izrek, L^p prostori. Finančna matematika 1: modeli gibanja cen, definicija izvedenih vrednostnih papirjev, princip ene cene, ekvivalentne mere in kompletnost modelov.

Izvedba (3/2): Predmet ima običajno strukturo izvajanja s predavanji in vajami. Študenti morajo opraviti pisni izpit, ki ima utež 60% v celotni oceni. Drugi del obveznosti z utežjo 40% je seminarska naloga. Ustni izpit je po želji, če kdo želi popraviti oceno.

Aktuarska matematika - življenska zavarovanja
Actuarial Mathematics - Life Insurance

Prof. Ermanno Pitacco, Professore Ordinario, Dipartimento di scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche, Facoltá di Economia, Universitá degli studi di Trieste, Italia

Content:

(1) MULTIPLE STATE MODELS FOR LIFE AND OTHER CONTINGENCIES: THE TIME-CONTINUOUS APPROACH.
   (a) Evolution of a risk: states, transitions, cash-flows. Examples.
   (b) The time-continuous Markov model.
   (c) The semi-Markov model.
   (d) Splitting of states.
   (e) Finding transition probabilities.
   (f) Increment-decrement tables.
   (g) Actuarial values: premiums, reserves, expected profits.
   (h) Representing the disability process.
   (i) Distributions of random present values.

(2) MULTIPLE STATE MODELS FOR LIFE AND OTHER CONTINGENCIES: THE TIME-DISCRETE APPROACH.
   (a) The time-discrete Markov model.
   (b) Examples.

(3) INFERENTIAL ISSUES.
   (a) A problem in disability insurance.
   (b) Transition frequencies.
   (c) Transition matrix with random elements.
   (d) The inference model.
   (e) Application to disability insurance.

(4) DYNAMICS IN TRANSITION INTENSITIES.
   (a) Mortality trends.
   (b) A dynamic setting.
   (c) Projecting mortality.

(5) POOLING RISKS.
   (a) The Bernoulli risk.
   (b) Managing a portfolio of risks.
   (c) Pricing.
   (d) Capital allocation.

Literature:

Haberman S., Pitacco E. (1999). *Actuarial models for disability insurance*, CRC Press.
Pitacco E. (2004). *"Disability Insurance, Numerical Methods"*, in: J. L. Teugels, B. Sundt (Eds.), *Encyclopedia of Actuarial Science*, J. Wiley & Sons, vol. 1: 541-548.
Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009). *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*, Oxford University Press.

Prerequisites: It is required that you passed a course in probability theory and statistics.

Verjetnost 2

Janez Bernik

Vsebina:

Markovske verige v diskretnem času. Povezava s teorijo grafov in linearno algebro. Osnovna struktura verig. Časi prvih prehodov in vrnitev. Povrnljiva in minljiva stanja. Časi ustavljanja ter enostavna in krepka markovska lastnost. Ergodično obnašanje verige. Limitni izreki. Posebnosti v primeru končnega števila stanj.

Markovske verige v zveznem času: čisti skočni procesi brez eksplozije. Zvezna markovska lastnost. Naprejšnje in nazajšnje enačbe Kolmogorova v integralski in diferencialni obliki in njihove rešitve. Diferencialne enačbe in generator polgrupe. Konstrukcija: stabilnost in neeksplozivnost.

Uporaba markovskih verig: čakalni sistemi (rojstno smrtni čakalni sistem, čakalni sistem M/M/1, osnovni pojmi teorije strežnih sistemov, nekateri pomembni primeri čakalnih sistemov). Metoda Monte Carlo markovskih verig (Bayesova statistika in Monte Carlo simulacije, algoritma Gibbsov vzorčevalnik in Metropolis-Hastings, konvergenca algoritmov.

Potrebno/pričakovano predznanje: Opravljeni izpiti iz verjetnosti in statistike na 1. stopnji.

Izvedba 3/2: Ocena je določena na osnovi pisnega izpita.

Finančna matematika 3 (teorija obrestnih mer)
Financial Mathematics 3 (Interest Rate Theory)

József Gáll, associate professor
Department of Applied Mathematics and Probability Theory,
Faculty of Informatics
University of Debrecen, Hungary,
jozsef.gall@inf.unideb.hu

The aim of the course:
The aim of the course is to discuss modern interest rate models, bond market structures and interest rate related financial assets, with special focus on forward interest rate models. Our aim is to discuss fundamental results of financial mathematics on this area and also to study some specific statistical and financial questions in such models.

Content:
Basic notions, interest rates, yield curves, bond structures, LIBOR rates.
Some elementary models, short rate models, no-arbitrage in short rate models, Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross, Hull-White models.
Forward interest rate models in discrete and continuous time settings. Classical cases, Heath-Jarrow-Morton (HJM) framework and forward rate models driven by random fields.
No arbitrage criteria and drift conditions, change of numeraire, martingale methods.
Some special topics: LIBOR models, defaultable bonds, pricing problems of certain interest rate derivatives.
Statistical questions in interest rate models, calibration methods, parameter estimation.

For the discussion of some fundamental models and theorems we shall mainly use some handouts and classical monographs such as [1], [2], [3], [4], [5]. On the other hand, we shall also discuss some particular problems in special models for which we shall use some papers in the literature given during the course.

Literature:

[1] Björk, T. (1998), Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, Oxford New York.
[2] Brigo, D. and Mercurio, F. (2006), Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Springer, Berlin Heidelberg New York.
[3] Jarrow, R. A. (1996), Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.
[4] Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997), Martingale Methods in Financial Modeling, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
[5] Pelsser, A. (2000), Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives, Springer-Verlag, London.

Prerequisites: It is required that you passed a course (or courses) in probability theory, statistics and random processes, and recommended that you passed an introductory course in financial mathematics.

Optimizacija v financah
Optimization in finance

Nacira Agram, Assistant Professor, University of Biskra, Algeria, currently at University of Oslo, Norway.
naciraa@math.uio.no

Predavanja bodo v angle"s"cini.
Language of the course: English

Content:

Background: Stochastic Integral, properties and Itô formula, martingale and martingale representation theorems. **Stochastic differential equations:**

a) Linear case: Explicit Solutions for:
   - Geometric Brownian motion (the stock price process)
   - Derive the famous Black & Scholes pricing formula
   - Ornstein-Uhlenbeck process (model interest rates, currency exchange rates, and commodity prices stochastically)
   - Numerical solutions by using for example Matlab programming

b) Nonlinear case: Existence and Uniqueness of the solutions

Optimization problems:
We will study stochastic control problems. Two important approaches are: Dynamic programming and Maximum principles.

We will study them separately and then try to solve some real problems from finance, for example: Optimal consumption and optimal portfolio optimization problems.

Literature:

- Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. Springer, 2013.
- Laurent Mazliak. An introduction to probabilistic methods in stochastic control. Lectures at Pescara University, April 1996.

Prerequisites: It is required that you passed a course in probability theory and an introductory course in financial mathematics.

Izbrana poglavja iz teorije iger

Aljaž Ule, Famnit, Univerza na Primorskem

Vsebina:
V predmetu se bomo spoznali z modernim razvojem v modeliranju strateškega odločanja. Prvi del bo namenjen zahtevnejšim vsebinam klasične teorije iger, kot so nepopolna informacija, sekvenčno ravnovesje in ponavljane igre. Drugi del bo namenjen uporabi klasične teorije v ekonomskih analizah pogajanj in oblikovanja tržnih pravil. Tretji del bo namenjen vedenjski teoriji iger ter modeliranju odločanja ljudi.

Potrebno/pričakovano predznanje: Obveznega predznanja ne zahtevamo, saj bomo v prvih predavanjih povzeli osnove nekooperativne teorije iger. Bo pa predznanje teorije iger zelo pripomoglo k razumevanju, saj bomo osnove obdelali na hitro.

Izvedba: Predmet se bo izvedel v 6-7 tednih v marcu in aprilu. Polovica predavanj se bo izvedla na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije (Famnit) na Univerzi na Primorskem v Kopru. Predavanja iz Kopra bodo preko video zveze v živo prikazana tudi v predavalnici na UL FMF.

Izbrana poglavja iz računalniške matematike: Napredno strojno učenje

Ljupčo Todorovski

Vsebina:

Predmet obravnava napredne teme iz strojnega učenja in podatkovnega rudarjenja. Cilj je študente seznaniti z sodobnimi trendi razvoja področja strojnega učenja s poudarkom na gradnji točnih in/ali razumljivih modelov iz podatkov. Na začetku semestra bomo za študente, ki niso poslušali izbirnega predmeta Izbrane teme iz analize podatkov, na hitro (v treh tednih) predstavili osnove strojnega učenja in podatkovnega rudarjenja. V nadaljevanju semestra bomo osnove nadgradili v nekaj smereh:

(1) Meta učenje in avtomatska izbira optimalnih algoritmov ter njih nastavitev za podano podatkovno množico;
(2) Razumevanje in interpretacija zapletenih napovednih modelov (ansamblov, globokih nevronskih mrež, modelov na osnovi podpornih vektorjev);
(3) Upoštevanje predznanja pri učenju napovednih modelov;
(4) Učenje algebraičnih in diferencialnih enačb iz podatkov in predznanja ter obravnava dinamičnih sistemov;
(5) Inkrementalno učenje in revizija napovednih modelov iz podatkovnih tokov;
(6) Hkratno napovedovanje večjega števila in različnih tipov ciljnih spremenljivk;
(7) Reševanje zahtevnih praktičnih problemov podatkovne analize in modeliranja.

Ce je bil poudarek pri predmetu na prvi stopnji razumevanje prednosti in slabosti ălgoritmov strojnega učenja, bo v okviru tega predmeta poudarek na kritičnem razumevanju delovanja algoritmov in identificiranju možnosti za njihov nadaljnji razvoj.

Vaje bodo še naprej namenjene praktični analizi izbranih podatkovnih množic z osnovnimi in naprednimi algoritmi strojnega učenja implementiranimi v programskem okolju R.

Potrebno/pričakovano predznanje: Potrebo je osnovno poznavanje programiranja (npr. predmet Uvod v programiranje), verjetnosti in statistike, predvsem osnovnih preizkusov statistične značilnosti (npr. predmeta Statistika in Verjetnosti račun) ter programskega okolja za statistiko R. Zelo zaželeno je, da so študenti seznanjeni z osnovami strojnega učenja in podatkovnega rudarjenja, ki smo jih obravnavali v okviru predmeta na prvi stopnji Izbrane teme iz analize podatkov. V prvih nekaj tednih bomo v okviru predmeta ponovili osnove strojnega učenja in podatkovnega rudarjenja.

Izvedba (3/2): Sprotne domače naloge (do 20% ocene), seminarska naloga (do 50% ocene) in pisni ali ustni izpit (vsaj 30% ocene).

Izbrana poglavja iz optimizacije

Janez Povh

Vsebina:
Matematična optimizacija je spada med področja, ki se zelo pogosto uporabijo v drugih vejah znanosti, prav tako pa tudi v tehniki in vsakodnevni praksi. Kadarkoli želimo nekaj optimirati, torej narediti nekaj na najboljši možen način, je prostor za metode matematične optimizacije. To področje aplikativne matematike je doseglo velik razvet po drugi svetovni vojni, še posebej po razvoju Simpleksne metode za linearno programiranje, ki jo je Georg Dantzig predstavil leta 1948. Od takrat je bilo razvitih mnogo metod za (približno) reševanje različnih (ne)linearnih optimizacijskih problemov, ki so bile vzporedno primerno teoretično utemeljene.

Študentje bodo pri tem predmeru spoznali:

- Uvod v matematično optimizacijo: potrebni in zadostni pogoji za optimalnost, Lagrangeova dualna teorija.
- Reševanje problemov matematične optimizacije: gradientna, Newtonova, Kvazi-Newtonova metoda.
- Linearno programiranje: formulacija problema, dualna teorija, simpleksna metoda, metode notranjih točk, programi za reševanje v okolju Matlab, praktični primeri.
- Kvadratično programiranje: optimizacija nad Lorentzovim stožcem, dualna teorija, reševanje z metodami notranji točk, programi za reševanje v okolju Matlab, praktični primeri.
- Semidefinitno programiranje: formulacija problema, dualna teorija, metode notranjih točk, druge metode za reševanje, programi za reševanje v okolju Matlab, praktični primeri.
- Razveji in omeji (R&O) algoritem: opis algoritma, teoretične lastnosti, izvedba.
- Primeri iz kombinatorične optimizacije: problem maksimalanega prereza grafa, problem iskanja neodvisne množice, reševanje s semidefinitnim programiranjem in (R&O) algoritmom.
- Komutativna polinomska optimizacija: formulacija polinomskega optimizacijskega problema, Putinarjev izrek o pozitivnosti, semidefinitna in linearna aproksimacijska hierarhija, programi za reševanje v okolju Matlab.

Potrebno/pričakovano predznanje: Študentje bodo potrebovali znanje predmetov Linearna algebra, Analiza 1 in Numerična linearna algebra.

Izvedba 3/2: Študentje bodo dobili tekom izvajanja vaj več domačih nalog. Na koncu predmeta bosta pisni in ustni izpit. Domače naloge bodo upoštevane pri končni oceni pisnega izpita.

Teorija izračunljivosti

Alex Simpson

Vsebina:
Computation is something we take for granted in the modern world, with current computers appearing almost limitless in what they can do. In this course we shall see that, nonetheless, real limitations on what is computable exist. Moreover, these limitations are fundamental ones that will remain irrespective of whatever future improvements are made to computer technology.

To achieve this we shall first see that the concept of *computability*, which characterises what is computable in principle, can be turned into a mathematical notion. There are several ways of approaching this, but all lead to the same canonical notion.

Having understood the notion of computability, mathematical problems divide naturally into two classes: those for which an answer can be computed (the *decidable* problems); and those whose answer cannot be attained by computation alone (the *undecidable* problems). Turing's notorious halting problem is the archetypal problem in the latter class. Many other famous mathematical problems reside in this class as well.

The standard notion of computability concerns computation on discrete data (such as integers, finite graphs, etc.). However, the notion can be extended naturally to obtain a meaningful definition of computability also on continuous data (such as real numbers). A striking result in this setting is that computable functions are necessarily continuous. Another striking application is that the limitations of computability can be put to positive use to give a rigorous mathematical definition for the conceptually challenging notion of *randomness*.

The syllabus will cover the topic below.

(1) Turing machines.
(2) The universal Turing machine, the halting problem and undecidability.
(3) Primitive recursive and partial computable functions.
(4) Other models of discrete computation.
(5) Classifying sets and functions according to their computability properties.
(6) Type 2 Turing machines for computation with continuous data.
(7) Computable functions on real numbers.
(8) Algorithmic randomness. The course will be given in English.

Literatura:

- A.M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society 2 42:230–65, 1937.
- M. Sipser. Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning. 3rd Edition, 2012.
- K. Weihrauch. Computable Analysis: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.
- P. Martin-Löf. The definition of random sequences. Information and Control 9(6):602– 619, 1966.

Potrebno/pričakovano predznanje: Opravljen predmet Logika in množice iz 1. letnika ali ekvivalentno znanje.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Obveznosti študenta: pisni izpit.

(IPRM) Računska Geometrija

Sergio Cabello

Vsebina:
Predmet krije osnovne algoritme računske geometrije. Računska geometrija se ukvarja z računskimi problemi, kjer imajo vhodni podatki geometrijski pomen. Podrobno bomo obravnavali naslednje probleme:

- Presečišča daljic. Algoritmi pometanja.
- Večkotniki in triangulacije večkotnikov.
- Konveksne množice. Algoritme za iskanje konveksne ovojnice točk v ravnini.
- DCEL. Problem določanja položaja.
- Voronojevi diagrami. Fortuneov algoritem.
- Delaunayeva triangulacija v ravnini. Prirastni algoritem. Interpretacija v 3 dimenzijah.
- Podatkovne strukture za točke.
- Dualnost in razporeditve premic.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnovno znanje o algoritmih in podatkovnih strukturah.

Izvedba 2/1/2 v 2. semestru:

- Obveznosti študentov: sodelovanje pri seminarju, pisni izpit iz vaj in ustni izpit.
- Oblika seminarja bo odvisno od število študentov: predstavitve novega materiala, predstavitve študentov ali skupno reševanje bolj zahtevnih nalog.
- Ocena bo upoštevala oceno izpita iz vaj ($\sim$40%), sodelovanje pri seminarju ($\sim$20%) in oceno ustnega izpita ($\sim$40%).
- Predmet bo v angleškem jeziku, če so tuji študenti prisotni. Študenti lahko delajo predstavitve in izpite v slovenskem jeziku.

Matematični modeli v biologiji

Barbara Boldin

Vsebina: Razumevanje kompleksnih procesov v naravi vse bolj temelji tudi na uporabi matematičnih modelov. Študenti matematike med študijem pridobijo dovolj osnovnega matematičnega znanja za morebitno uporabo v naravoslovju. Namen predmeta je študentom prikazati uporabnost matematike v biologiji in medicini ter študente seznaniti z osnovnimi metodami modeliranja in analize modelov. V teku predmeta študenti spoznajo klasične diskretne in zvezne matematične modele v ekologiji (kot so npr. modeli zajedavstva in simbioze ter modeli tekmovanja), v epidemiologiji (npr. SIS, SIR, SEIR modeli), v fiziologiji (nevrološki modeli in modeli morfogeneze) in v genetiki.

Potrebno/pričakovano predznanje: Za uspešno spremljanje predmeta je potrebno predznanje linearne algebre, splošne analize, teorije (sistemov) diferencialnih enačb ter nekaj osnovne kombinatorike in teorije verjetnosti. Zaželeno je poznavanje teorije dinamičnih sistemov, a to ni pogoj. Določene potrebne rezultate iz teorije dinamičnih sistemov (npr. vprašanje stabilnosti, obstoj limitnih ciklov itd.) bomo omenili v teku predavanj, žal pa ne bo dovolj časa za podrobnejše teoretične izpeljave. V tem smislu je to tipični predmet iz uporabne matematike (mnogo primerov uporabe, malo dokazov). Zelo koristna je spretnost pri delu z računalnikom (numerično in simbolno računanje s programi Mathematica, MatLab itd.).

Izvedba: Predavanja, vaje, seminar. Na predavanjih se bomo osredotočili na formulacijo modelov, metode analize ter spoznali glavne značilnosti obravnavanih modelov. Namen vaj je natančno obravnavati konkretne krajše zglede.

Izpit je sestavljen iz pisnega izpita, izdelave in predstavitve domače naloge ter krajšega ustnega izpita. Pisni izpit študent(ka) opravi bodisi v obliki dveh kolokvijev bodisi na enem od izpitnih rokov. Domača naloga bo zasnovana individualno in projektno, zahtevala bo formulacijo in analizo matematičnega modela za specifičen biološki problem ter tudi interpretacijo rezultatov. Študent(ka) domačo nalogo predstavi v okviru seminarja. Izdelana in predstavljena domača naloga ter opravljen pisni izpit sta pogoja za ustni izpit (kratek zaključni pogovor in vpis ocene).

Moderna fizika

Peter Križan

Vsebina:

Elektromagnetno polje:

- Električna in magnetna polja;
- Integralska in diferencialna oblika Maxwellovih enačb;
- Elektromagnetno valovanje;

Posebna teorija relativnosti:

- Transformacija prostor-časa
- Transformacije električnega in magnetnega polja, Maxwellove enačbe v kovariantni obliki

Kvantna fizika:

- Valovne lastnosti delcev;
- Schroedingerjeva enačba in probabilistična interpretacija;
- Postulati kvantne fizike, Heisenbergove relacije;
- Harmonični oscilator;
- Vodikov atom;
- Standardni model osnovnih delcev: leptoni in kvarki, osnove umeritvenih teorij elektromagnetne, šibke in močne interakcije.
- Modeli vesolja

Potrebno/pričakovano predznanje: Od študentov pričakujemo predznanje fizike v obsegu ustreznega predmeta na 1. stopnji študija matematike.

Izvedba 3/2. Predmet obsega predavanja (3 ure tedensko) in računske vaje (2 uri tedensko). Pri računskih vajah obdelamo izbrane primere, ki ponazorijo snov s predavanj. Snov, obdelana na računskih vajah, je predmet pisnega izpita; tega lahko opravimo sproti v obliki dveh kolokvijev. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Astronomija

Tomaž Zwitter

Vsebina:
Zgodovinski uvod: astronomska odkritja, ki so spremenila svet, osnovne meritve.
Osnove orientacije po nebu: koordinatni sistemi, kvantitativne posledice rotacije in revolucije, loma, precesije, lastnega gibanja, aberacije svetlobe in paralakse.
Sodobni astronomski teleskopi: odboj in lom, osnovni parametri teleskopa, geometrijske, uklonske in atmosferske omejitve, nastanek in lastnosti slike.
Astronomski instrumenti: osnovne lastnosti digitalnih detektorjev, osnove fotometričnih in spektroskopskih opazovanj.
Sonce kot tipična zvezda: masa Zemlje in Sonca, njuna povprečna gostota, izsev, efektivna temperatura, površinski težnostni in rotacijski pospešek.
Struktura Soncu podobnih zvezd: hidrostatično ravnovesje, dinamični čas, središčni tlak in temperatura, utemeljitev privzetka idealnega plina, politropni model, virialni teorem, termični čas, prozornost snovi, ocena proste poti fotonov, sevalni in konvekcijski prenos energije.
Starost zvezd: primer Zemlje in Sonca, jedrske reakcije, njihova stabilnost in nuklearni čas, odvisnost izseva od mase za Soncu podobne zvezde.
Razvoj zvezd: nastanek in Jeansova masa, faza orjakinj, končne faze razvoja, odvisnost razvoja od mase.
Opazovanje razvoja: Hertzsprung-Russellov diagram, zvezdne kopice, merjenje razdalj, spektri kemijskih elementov v zvezdnih atmosferah v odvisnosti od temperature, kemične sestave, radialne hitrosti in težnostnega pospeška, prekrivalne spektroskopske dvojne zvezde, opazovanje končnih stopenj razvoja zvezd.
Medzvezdni prostor: absorpcija v plinu in prahu, vrste meglic, opazljive lastnosti.

Potrebno/pričakovano predznanje: Vpis v letnik.

Izvedba 4/2. Predavanja, vaje in praktična domača naloga, izvedena na Astronomsko geofizikalnem observatoriju. Domača naloga se upošteva pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.